

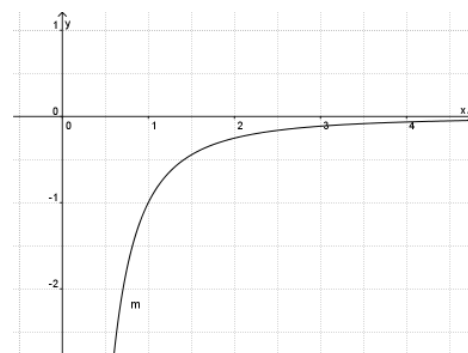
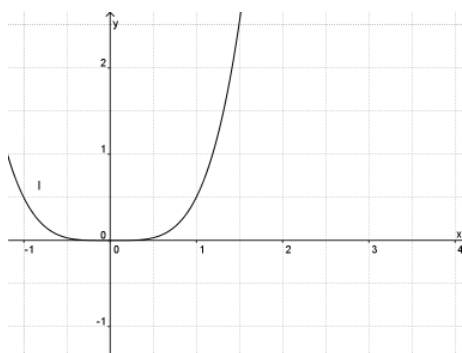
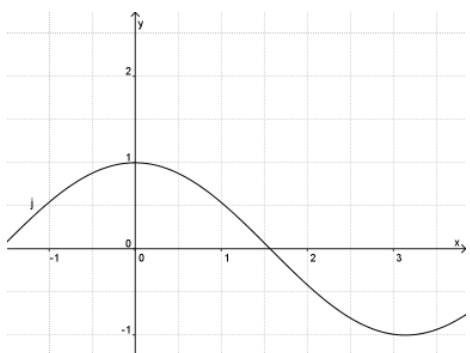
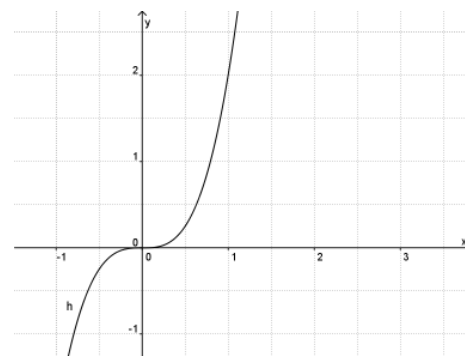
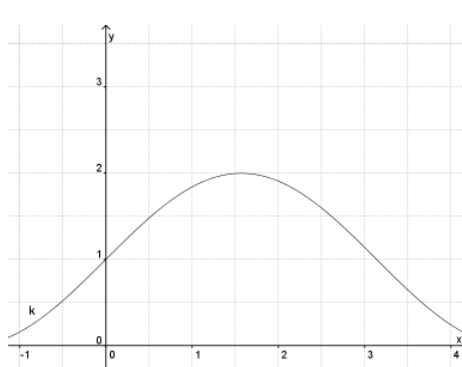
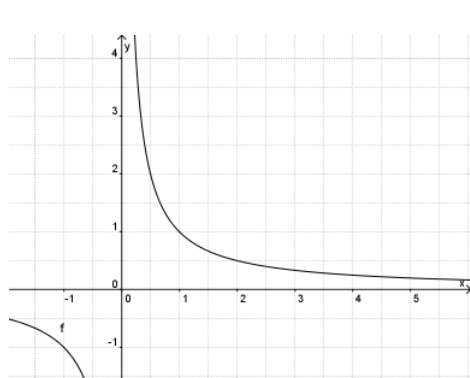
Aufgaben zum Kapitel: Weitere Ableitungsregeln

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen in dem gegebenen Intervall umkehrbar sind. Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktionen, sowie deren Definitions- und Wertemenge.

a) $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$ c) $h(x) = \frac{x}{2x-1}, x > 0,5$

2. Untersuchen Sie, auf welchem größtmöglichen Intervall I die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x$ umkehrbar ist, geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an und skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} .

3. Die gegebenen Graphen stellen Funktionen und deren Ableitungen dar. Finden Sie die passenden Paare und geben Sie die Graphen an, die zu umkehrbaren Funktionen gehören.



4. Leiten Sie ab!

a) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} \sin x$

b) $g(x) = \sqrt[3]{2x^5} - \cos x$

c) $h(a) = \sqrt{3a^2 - a^{1,2}}$

d) $i(a) = \frac{a+x}{\cos a}$

e) $j(x) = 2 \sin(x^{2,5} + \pi)$

f) $k(x) = (2 + \sqrt{x})^{\frac{4}{5}}$

g) $l(x) = \frac{2x}{\left(\frac{2}{x} + 1\right)^2}$

h) $m(x) = \frac{1}{ax} + ax + a + x$

i) $n(x) = \cos(\sqrt{9-x^2})$

Lösungen:

Aufgabe 1

a) $f(x) = 3x + 2 \rightarrow f'(x) = 3 > 0$ für alle reellen $x \rightarrow f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar

Aufstellen des Terms: $y = 3x + 2 \rightarrow 3x = y - 2 \rightarrow x = 1/3 y - 2/3$
 $\rightarrow f^{-1}(x) = 1/3 x - 2/3, D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$ und $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0 \rightarrow g(x) = x^{-0,5} \rightarrow g'(x) = -0,5x^{-1,5} < 0$ für $x > 0$
 $\rightarrow g$ ist für $x > 0$ umkehrbar

Aufstellen des Terms: $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{1}{y^2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$
 $D_{g^{-1}} = W_g = \mathbb{R}^+$ und $W_{g^{-1}} = D_g = \mathbb{R}^+$

c) $h(x) = \frac{x}{2x-1}, x > 0,5 \rightarrow h'(x) = \frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0$ für alle $x > 0,5$
 $\rightarrow h$ ist für $x > 0,5$ umkehrbar

Aufstellen des Terms: $y = \frac{x}{2x-1} \rightarrow 2xy - y = x \rightarrow 2xy - x = y \rightarrow x(2y-1) = y$
 $\rightarrow x = \frac{y}{2y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y}{2y-1}$

$D_{h^{-1}} = W_h =]0,5; \infty[$ und $W_{h^{-1}} = D_h =]0,5; \infty[$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = -2x + 2 \rightarrow$ Der Graph von f steigt streng monoton für $x < 1$ und fällt streng monoton für $x > 1 \rightarrow f$ ist entweder auf $I =]-\infty; 1[$ oder auf $J =]1; \infty[$ umkehrbar, Intervall I ist hierbei größer.

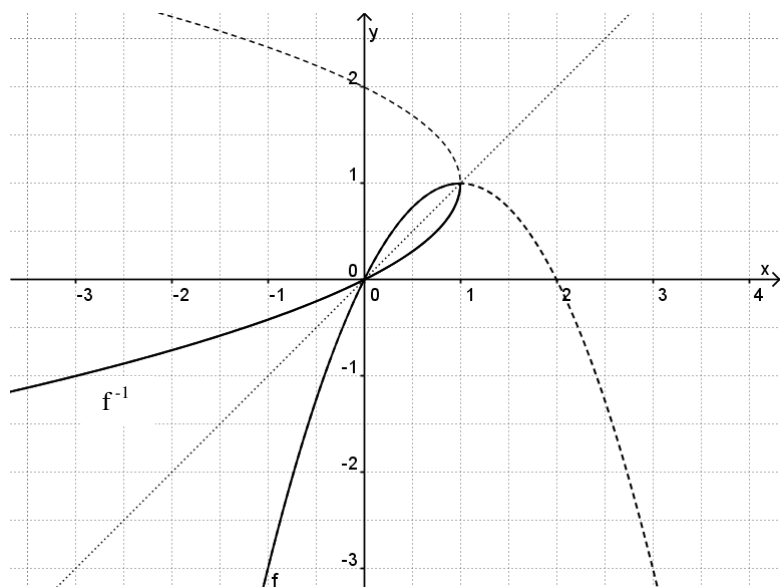
$D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty; 1[$, da f streng monoton fällt auf I , nimmt f den kleinsten Funktionswert beim größten x -Wert und den größten Funktionswert beim kleinsten x -Wert aus I an. Dabei gilt: $f(1) = 1$.

$$W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 1[= I$$

Bestimmen des Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung von G_f an der Winkelhalbierenden

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x} \text{ auf } I$$

$$(f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x} \text{ auf } J)$$



Aufgabe 3

$$f'(x) = m(x) \quad k'(x) = j(x) \quad l'(x) = h(x)$$

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal schneidet (Eineindeigkeitskriterium).

Dies ist bei den Funktionen f, h und m der Fall.

Aufgabe 4

$$\text{a) } f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} \sin x \rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} \sin x + 2x^{\frac{3}{2}} \cos x = 3x^{\frac{1}{2}} \sin x + 2x^{\frac{3}{2}} \cos x$$

(Produktregel)

$$\text{b) } g(x) = \sqrt[3]{2x^5} - \cos x = \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{5}{3}} - \cos x \rightarrow g'(x) = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} + \sin x$$

$$\text{c) } h(a) = \sqrt{3a^2 - a^{1,2}} \rightarrow h'(a) = \frac{1}{2\sqrt{3a^2 - a^{1,2}}} \cdot (6a - 1,2a^{0,2})$$

(Kettenregel: $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = 3a^2 - a^{1,2}$)

$$\text{d) } i(a) = \frac{a+x}{\cos a} \rightarrow i'(a) = \frac{\cos a - (a+x) \cdot (-\sin a)}{(\cos a)^2} = \frac{\cos a + a \sin a + x \sin a}{(\cos a)^2}$$

(Quotientenregel, x ist hier Parameter)

$$\text{e) } j(x) = 2 \sin(x^{2,5} + \pi) \rightarrow j'(x) = 2[\cos(x^{2,5} + \pi)] \cdot 2,5x^{1,5} = 5x^{1,5} \cos(x^{2,5} + \pi)$$

(Kettenregel: $u(x) = 2 \sin x$, $v(x) = x^{2,5} + \pi$)

$$\text{f) } k(x) = (2 + \sqrt{x})^{\frac{4}{5}} \rightarrow k'(x) = \frac{4}{5} (2 + \sqrt{x})^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Kettenregel: $u(x) = x^{\frac{4}{5}}$, $v(x) = 2 + \sqrt{x}$)

$$\text{g) } l(x) = \frac{2x}{\left(\frac{2}{x} + 1\right)^2} \rightarrow \text{(Quotientenregel + Kettenregel mit } u(x) = x^2, v(x) = \frac{2}{x} + 1)$$

$$l'(x) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{x} + 1\right)^2 - 2x \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4} = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{x} + 1\right) + \frac{4}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4} = \frac{\frac{12}{x} + 2}{\left(\frac{2}{x} + 1\right)^3} = \frac{12 + 2x}{x \left(\frac{2}{x} + 1\right)^3}$$

$$\text{h) } m(x) = \frac{1}{ax} + ax + a + x \rightarrow m'(x) = -\frac{1}{ax^2} + a + 1 \quad (a \text{ ist hier Parameter})$$

$$\text{i) } n(x) = \cos(\sqrt{9-x^2}) \rightarrow n'(x) = -\sin(\sqrt{9-x^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x \cdot \sin(\sqrt{9-x^2})}{\sqrt{9-x^2}}$$

Zweimal Kettenregel anwenden mit $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sqrt{9-x^2} = a(b(x))$ mit $a(x) = \sqrt{x}$ und $b(x) = 9-x^2 \rightarrow n'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ und $v'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x)$